ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

I

On considère dans cette section l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$, où α est un réel strictement positif.

1. Etudier la convergence de cette intégrale pour les valeurs de α appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$.

2. Prouver la convergence de l'intégrale lorsque l'on a $\alpha \in]0, 1]$ (on pourra utiliser une intégration par parties pour l'étude au voisinage de l'infini).

3. Etablir l'encadrement $\frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt \right| \leq \frac{2}{n^\alpha \pi^\alpha}$.

Qu'en déduit-on sur la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t^\alpha} \right| dt$?

II

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. Prouver la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$. On appelle $F(x)$ la valeur de cette intégrale. Dans la suite de cette section, on envisagera $F(x)$ comme la somme de la série de terme général $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

2. Etudier la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, établir l'inégalité $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)|$.

Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Enoncer précisément un théorème prouvant la continuité de F sur cet intervalle et montrer que l'on a $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

4. Démontrer que F est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ et donner une expression simple de $F'(x)$ sur cet intervalle.

5. Déduire des résultats précédents une expression de $F(x)$ et la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$. Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$?

III

On désigne désormais par f une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$.

1. Montrer que l'on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0$.

2. On définit une fonction g par les formules : $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$. Prouver que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de $g'(0)$.

3. On suppose maintenant que 0 appartient à l'intervalle ouvert $]a, b[$. A l'aide des questions précédentes et des résultats de la section II, montrer que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t) \dfrac{\sin nt}{t} \, dt = \pi f(0)$.

4. Pour n entier strictement positif, établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(n-1)t - \cos(n+1)t}{t^2} \, dt$ et calculer la limite de cette intégrale lorsque n tend vers l'infini.

IV

Dans cette section, f désigne comme précédemment une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On suppose en outre que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt$ converge absolument. Enfin A est un réel et m un entier vérifiant $0 < A < m$.

1. Etablir la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \dfrac{\sin nt}{t} dt$ et celle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt$ quand on fixe u dans $\mathbb{R}$.

2. Justifier les égalités :

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^n \left(\int_{-m}^{-A} f(t) \cos ut \, dt \right) du = \int_{-\infty}^{-A} f(t) \frac{\sin nt}{t} \, dt$$

et $$\lim_{m\to+\infty} \int_0^n \left(\int_A^m f(t) \cos ut \, dt \right) du = \int_A^{+\infty} f(t) \frac{\sin nt}{t} \, dt .$$

Prouver enfin que l'on a $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt \right) du = \pi f(0)$.

3. Soit x fixé arbitrairement dans $\mathbb{R}$. En utilisant la fonction $g(t) = f(x+t)$, déduire de la question précédente la relation :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(t-x)} f(t) \, dt \right) du = f(x) .$$